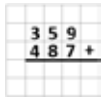
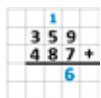

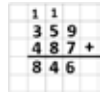


# Leren van uitgewerkte voorbeelden bij rekenen

**Uitgewerkte voorbeelden zijn een krachtig didactisch middel bij het onderwijzen van nieuwe leerstof aan kinderen. Veel rt-materialen bevatten daarom deze stapsgewijze instructies. Uitgewerkte voorbeelden zijn echter niet alleen leerzaam voor leerlingen die moeite hebben met rekenen, maar ook voor gemiddelde en sterke rekenaars. Behalve in de rt-kamer zouden ze daarom ook preventief moeten worden ingezet in de klas. Beter een pond preventie dan een kilo zorg.**

Tekst: Marcel Schmeier

**E**en uitgewerkt voorbeeld (worked example) is een stapsgewijze uitwerking van een rekenopgave door een expert zoals een remedial teacher of leerkracht, waardoor de leerlingen zien hoe het antwoord tot stand komt (Hattie e.a., 2017). Het opdelen van de opgave in afzonderlijke stappen ontlast het werkgeheugen en helpt de leerlingen om zich de volledige oplossingsprocedure geleidelijk en grondig eigen te maken. Het observeren van een expert is een zeer krachtige manier van leren. Door uitgewerkte voorbeelden te gebruiken verwerven leerlingen significant efficiënter de rekvaardigheden die we hen willen aanleren (Van Loon-Hillen, 2009). Uitgewerkte voorbeelden hebben een effectgrootte van 0.57 en behoren daarmee tot de meest effectieve instructietechnieken die we tot onze beschikking hebben (Hattie, 2009).

<b>1</b>	Schrijf de getallen recht onder elkaar.	
<b>2</b>	Tel de eenheden op. Zet de tien boven de tientallen.	
<b>3</b>	Tel de tientallen op. Zet de honderd boven de honderdtallen.	
<b>4</b>	Tel de honderdtallen op.	

Figuur 1: Een uitgewerkt voorbeeld.

## INSTRUCTIE EN VRAGEN STELLEN

Bij het onderwijzen van nieuwe leerstof, werk je de stappen één voor één uit op het bord. Het uitwerken van de eerste stap doe je in stilte, waarna je de leerlingen vraagt om deze over te nemen in hun schrift (Barton, 2018). Als ze dit hebben gedaan, geef je een doelgerichte en krachtige toelichting op de stap, bijvoorbeeld: "Je schrijft de getallen recht onder elkaar, zodat je de juiste waardes bij elkaar optelt. De eenheden bij de eenheden, de tientallen bij elkaar en de honderdtallen bij elkaar."

Hierna stel je vragen aan de leerlingen over deze eerste stap. Bijvoorbeeld: "Moet ik optellen of aftrekken?". Of: "Welke tientallen moet ik bij elkaar optellen?" Hierbij is het belangrijk om denktijd te bieden. Zorg ervoor dat alle leerlingen daadwerkelijk nadenken en de vraag in hun hoofd beantwoorden. Geef een willekeurige beurt om begrip te controleren of geef zelf het antwoord om er zeker van te zijn dat er geen misconcepties ontstaan in deze prille fase van het eigen maken van nieuwe leerstof.

Op deze manier werk je alle stappen uit: opschrijven in stilte, over laten nemen, toelichten, vragen stellen. Deze aanpak maakt het gebruik van uitgewerkte voorbeelden extra krachtig (Barton, 2018). Nadat je op deze wijze een voorbeeld hebt uitgewerkt, hebben de leerlingen dit correct en netjes in hun schrift staan. Dit voorbeeld kunnen ze raadplegen wanneer ze

tijdens de les dreigen vast te lopen.

In de les worden verschillende voorbeelden uitgewerkt volgens telkens dezelfde oplossingsprocedure. De voorbeelden wisselen, de stappen zijn steeds hetzelfde. Op deze manier slijt de oplossingsprocedure goed in en wordt de transfer versterkt naar nieuwe situaties waarin de rekenbewerking kan opduiken.

### STAPPEN WEGLATEN

Bij het uitwerken van nieuwe voorbeelden geef je de leerlingen telkens iets meer verantwoordelijkheid. Dit doe je door steeds meer stappen door de leerlingen te laten uitwerken in plaats van deze voor te doen. Je maakt hierbij gebruik van afmaakvoorbeelden (completion examples) (Hattie & Yates, 2014).

Je doet bijvoorbeeld de eerste drie stappen voor en laat daarna de leerlingen de vierde stap uitwerken. Hierna doe je de eerste twee stappen voor en de leerlingen werken de stappen drie en vier uit. Op deze manier draag je de verantwoordelijkheid geleidelijk over. Het weglaten van stappen (fading) heeft een effectgrootte van 0.6 en is daarmee een krachtige aanvulling op het gebruik van uitgewerkte voorbeelden (Hattie, 2009).

Er bestaan verschillende varianten van het weglaten van stappen: van onderen, van boven, om en om of de makkelijkste stappen het eerst weglaten.

<p><b>1</b> Schrijf de getallen recht onder elkaar.</p> <p><b>2</b> Tel de eenheden op. Zet de tien boven de tientallen.</p> <p><b>3</b></p> <p><b>4</b></p>	<p><b>1</b></p> <p><b>2</b></p> <p><b>3</b> Tel de tientallen op. Zet de honderd boven de honderdtallen.</p> <p><b>4</b> Tel de honderdtallen op.</p>
Van onderen stappen weglaten (backward fading).	Van boven stappen weglaten (forward fading).
<p><b>1</b> Schrijf de getallen recht onder elkaar.</p> <p><b>2</b></p> <p><b>3</b> Tel de tientallen op. Zet de honderd boven de honderdtallen.</p> <p><b>4</b></p>	<p><b>1</b></p> <p><b>2</b> Tel de eenheden op. Zet de tien boven de tientallen.</p> <p><b>3</b></p> <p><b>4</b></p>
Om en om weglaten (alternately fading).	Makkelijkste stappen eerst weglaten (adaptive fading).

Figuur 2: Varianten van het weglaten van stappen.

Gedurende een leerproces veranderen leerlingen van onkundig in kundig, van beginners in experts en dat vraagt om meer zelfstandigheid en verantwoordelijkheid naarmate de kundigheid toeneemt. Hoe meer leerlingen weten en kunnen, hoe minder effectief het is om sturend te zijn in de instructie. Dit heet het omgekeerde expertise-effect (expertise reversal effect). In het instructieproces moet je hier rekening mee houden door jouw ondersteuning steeds verder af te bouwen en de leerlingen steeds meer zelf te laten denken en werken.

### LEERLINGEN ZELF LATEN UITLEGGEN

Laat de leerlingen in eigen woorden vertellen wat er bij iedere stap precies gebeurt. Dek hiervoor de geschreven instructie af. Door leerlingen zelf te laten uitleggen aan de hand van de uitwerking, wordt de leerstof beter onthouden dan wanneer de instructie letterlijk wordt nagezegd of -gelezen (Barton, 2018).

Zelfuitleg (self explanation) heeft een effectgrootte van 0.57 en is dus de moeite waard om toe te voegen aan lesgeven met uitgewerkte voorbeelden (Hattie, 2009). Zelfuitleg is overigens effectiever wanneer leerlingen het uitgewerkte voorbeeld van de expert moeten verklaren dan wanneer ze hun eigen denkwijze of oplossing moeten toelichten (Barton, 2018).

Stel bij iedere stap veel vragen om de leerlingen te laten nadenken over wat er precies gebeurt. Bied denktijd en vraag de leerlingen expliciet om na te denken over de vraag die je stelt, zodat ze een antwoord kunnen geven op het moment dat ze een beurt krijgen. Mogelijke vragen bij het uitgewerkte voorbeeld van figuur 1 zijn:

- waarom zijn er acht honderdtallen en niet zeven?
- hoeveel eenheden zijn er?
- wat doe je met tien tientallen?
- hoeveel tientallen houd je over als je inwisselt?
- wanneer wissel ik niet in?


### ZELF VOORBEELDEN ONTWERPEN

Er bestaan veel kant-en-klare uitgewerkte voorbeelden. Hieronder staan enkele voorbeelden uit diverse bronnenboeken, rekenmethodes en websites.


**Uitleg 3**

Je kunt euro's en centen bij elkaar optellen.

Hoeveel geld ligt er?



**Stap 1** Tel de euro's op.



5 euro + 2 euro = 7 euro

**Stap 2** Tel de centen op.



50 cent + 20 cent + 10 cent = 80 cent

**Stap 3** Tel de euro's en de centen op.

7 euro + 80 cent = 7 euro en 80 cent  
Je schrijft dit als € 7,80.

Er ligt € 7,80.

Figuur 3: Startrekenen vooraf – Op weg naar 1F, Uitgeverij Deviant.

**Kommagetallen onder elkaar met elkaar vermenigvuldigen**

$2,7 \times 13,95 =$

$$\begin{array}{r} 2,7 \times \\ 13,95 \\ \hline 9765 \\ 27900 \\ \hline 37665 \end{array}$$

- ▶ Zet het getal met de meeste cijfers bovenaan.
- ▶ Vermenigvuldig van rechts naar links net zoals bij vermenigvuldigen van hele getallen. Zet geen komma's in de tussenuitkomsten.
- ▶ Plaats de komma in het antwoord onder de streep. In het eerste getal staan 2 cijfers achter de komma, in het tweede getal 1. In het antwoord komen  $2 + 1 = 3$  cijfers achter de komma.

Figuur 4: Het grote rekenboek, leer- en oefenboek groep 7, Scala Leuker Leren.

**Ik kan een heel getal delen door een breuk.**

**Stap 1**  
Vergroot de breuk naar een heel getal

**Stap 2**  
Vergroot het hele getal met hetzelfde getal.

**Stap 3**  
Reken nu de som uit.

Figuur 7: Rekenen-oefenen.nl.

$963 : 18 = 1000 : 20 = 50$

9	6	3	:	1	8	=	5	3	r	e	s	t	:	9
9	0	0					5	0						
6	3													
5	4													
9														

9 honderdtallen : 18 gaat niet.

96 tientallen : 18 gaat 5 keer. Schrijf 50 (5 tientallen) op.  $50 \times 18 = 900$ . Zet 900 onder 963 en trek af.

63 eenheden : 18 gaat 3 keer. Schrijf 3 op.  $3 \times 18 = 54$ . Zet 54 onder 63 en trek af.

$963 : 18 = 53$  rest 9. De uitkomst ligt in de buurt van de schatting.

Figuur 5: Getal & Ruimte Junior (groep 6), Noordhoff Uitgevers.

**Schatten:**  
De waarde of grootte van een hoeveelheid of getal ongeveer uitspreken of noteren.

**Voordelen van schatten**

- Antwoorden van de opgaven kun je makkelijk controleren.
- Je kunt snel uitrekenen wat iets in de winkel ongeveer gaat kosten.
- Bij schatten maak je de getallen rond. Hierdoor kan je snel een som uit het hoofd rekenen.

**Voorbeeld**

$479 + 398 \approx$  (is ongeveer)  
 $\approx$  ongeveer teken

**Stap 1** Maak van deze twee getallen eerst ronde getallen  
 $479 \approx 500$  en  $398 \approx 400$

**Stap 2**  
 $500 + 400 = 900$

**Stap 3**  
 $479 + 398 \approx 900$

Figuur 8: Reken je wijs, Graviant.

**Bijvoorbeeld:**  $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

- Vermenigvuldig de noemers met elkaar:  
 $2 \times 3 = 6$
- Vermenigvuldig de tellers met elkaar:  
 $1 \times 2 = 2$
- Vereenvoudig!

teller	2	1
noemer	6	3

Antwoord:  $\frac{1}{3}$

Reken Remedie

Figuur 6: Reken Remedie, PO Educatief.

Helaas bevatten niet alle rekenmethodes uitgewerkte voorbeelden, waardoor het soms noodzakelijk is om deze zelf te ontwerpen. Neem hiervoor een opdracht uit het leerlingboek en los deze zelf op. Beschrijf vervolgens de oplossingsprocedure die je hebt gebruikt en deel de uitwerking op in stappen: links de oplossingsprocedure in woorden en rechts de uitwerking in stappen. Gebruik uitgewerkte voorbeelden in je praktijk, want goed voorbeeld doet goed volgen.

Correspondentieadres: marcel.schmeier@expertis.nl



Marcel Schmeier werkt bij Expertis Onderwijsadviseurs en is auteur van de boeken *Expliciete Directe Instructie: tips en technieken voor een goede les* en *Effectief rekenonderwijs op de basisschool*. Marcel zet zich in voor gelijke onderwijskansen en beter rekenonderwijs.

## LITERATUUR

- Barton, C. (2018). *How I wish I'd taught maths*. Melton: John Catt Educational.
- Hattie, J. (2009). *Visible learning. A synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement*. New York: Routledge.
- Hattie, J. & Yates, G.C.R. (2014). *Visible Learning and the Science of How We Learn*. New York: Routledge.
- Hattie, J., Fisher, D. & Frey, N. (2017). *Visible learning for mathematics*. Thousand Oaks: Corwin.
- Loon-Hillen van, N.H. (2009). *Effect van procesgerichte uitgewerkte voorbeelden op rekenprestaties, cognitieve belasting en verwerkingstijd van groep 6-basisschoolleerlingen*. Heerlen: Open Universiteit.